السؤال الأول: ($10+5+5+10+10=40$ درجة)

"1. بفرض أنَّ: $f(z)=u+iv$ دالة تحليلية فأثبت أنَّ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=4|f'(z)|^2.$$

"2. إذا كان $z_1=2$ و $z_2=3-i$ و $z_3=x+iy$ ، فأوجد العددين الحقيقين $x,y\in\mathbb{R}$ لتكون الأعداد العقدية السابقة رؤوس مثلث متساوي الأضلاع ، ثمَّ أثبت أنَّ z_3 يكتب على الصورة:

$$z_3=2+\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}} \quad \text{أو} \quad z_3=2+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

"3. عرِّف الدالة $f(z)=\dfrac{z^3+2z-i}{z-i}$ عند النقطة $z=i$ لتصبح مستمرة عندها ، ثم أوجد $f'(2i)$.

"4. باستخدام الاحداثيات القطبية أثبت أنَّ: $(-1+i)^7=-8(1+i)$.

"5. أوجد الجذور التكعيبية للعدد $z=-11-2i$.

السؤال الثاني: $(10+10+10+10=40$ درجة) **(أجب عن أربعة فقط من الأسئلة التالية)**

"1. إذا كان $f(z)=x^3+i(y+1)^3$ ، ففي أي النقاط تكون الدالة قابلة للاشتقاق وفي أي النقاط تكون تحليلية.

"2. إذا كان $u(x,y)=y^2-x^2+x+y$ ، فأثبت أنَّ هذه الدالة توافقية ، ثمَّ أوجد المرافق التوافقي لها ، ثمَّ عبر عن الدالة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ بدلالة z.

"3. إذا كان $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\,6x(2y-1)$ و $f(0)=3-2i$ ، فاحسب $f(1+i)$.

"4. إذا كان $\log z=\text{Log}|z|+i\phi$ حيث $\left(|z|>0\ ,\ \dfrac{2\pi}{3}\le\phi\le\dfrac{8\pi}{3}\right)$ ، فأوجد $\log(z^2)$, $2\log(z)$ ، ثمَّ قارن بينهما إذا علمت أنَّ $z=i$.

"5. اعتماداً على الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة $\cos z=\sqrt{2}$.

"6. أوجد جميع جذور المعادلة: $e^z=-3$.

السؤال الثالث: $(10+10=20$ درجة)

"1. أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1=-1$, $z_2=0$, $z_3=1$ فوق النقاط $\omega_1=\infty$, $\omega_2=0$, $\omega_3=1$ على الترتيب ، ما هي النقاط الثابتة لهذه التحويلة ، ثمَّ أوجد خيال المستقيم $y=0$ وفق هذه التحويلة.

"2. أوجد خيال $(x\ge 0\ ,\ 0\le y\le 2)$ وفق التحويلة $\omega=\dfrac{1}{z}$ ، مع الرسم .

====================== انتهت الأسئلة ======================

السؤال الأول:

❶ بفرض أنَّ: $f(z)=u+iv$ دالة تحليلية فأثبت أنَّ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=4|f'(z)|^2.$$

الحل: بفرض أنَّ $f(z)=u+iv$ دالة تحليلية عندئذٍ :

$$|f(z)|^2=u^2+v^2 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|^2=\left[\frac{\partial}{\partial u}|f(z)|^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial v}|f(z)|^2\frac{\partial v}{\partial x}\right]=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|^2=\left[\frac{\partial}{\partial u}|f(z)|^2\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial}{\partial v}|f(z)|^2\frac{\partial v}{\partial y}\right]=2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=\frac{\partial}{\partial y}\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=$$

$$=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$=2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+2v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+2\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)$$

وبما أنَّ الدالة $f(z)$ دالة تحليلية فإن كل من الدالة u والدالة v هي دالة توافقية وبالتالي فكلاهما يحقق شرط لابلاس وهما أيضاً يحققان شرطي كوشي ريمان أي أنَّ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

ومنه فإنَّ:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=2u(0)+2v(0)+2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=4\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]=4|f'(z)|^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=4|f'(z)|^2}$$

❷ إذا كان $z_1=2$ و $z_2=3-i$ و $z_3=x+iy$ ، فأوجد العددين الحقيقيين $x\,,y\in\mathbb{R}$ لتكون الأعداد العقدية السابقة رؤوس مثلث متساوي الأضلاع ، ثمَّ أثبت أنَّ z_3 يكتب على الصورة:

$$z_3=2+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{أو} \quad z_3=2+\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

الحل:

يكون المثلث متساوي الأضلاع **إذا وفقط إذا** تحقق: $|z_3-z_2|=|z_3-z_1|=|z_2-z_1|$ ، وبالتالي:

$$|z_3-z_1|=|z_2-z_1| \Rightarrow |(x-2)+iy|=|1-i| \Rightarrow (x-2)^2+y^2=2 \;\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$|z_3-z_2|=|z_2-z_1| \Rightarrow |(x-3)+i(y+1)|=|1-i| \Rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=2 \;\cdots\cdots\cdots(2)$$

إنَّ المعادلتين $(1)\,,(2)$ تكتبان بالشكل:

$$(x-2)^2+y^2=2 \Rightarrow x^2-4x+4+y^2=2 \Rightarrow$$

$$x^2-4x+y^2=-2 \;\cdots\cdots\cdots(1')$$

$$(x-3)^2+(y+1)^2=2 \Rightarrow x^2-6x+9+y^2+2y+1=2 \Rightarrow$$

$$x^2-6x+y^2+2y=-8 \;\cdots\cdots\cdots(2')$$

بطرح العلاقة $(1')$ من العلاقة $(2')$ نجد أنَّ:

$$-2x+2y=-6 \Rightarrow y-x=-3 \Rightarrow \boxed{y=x-3} \;\cdots\cdots\cdots(3)$$

وبالتعويض في العلاقة $(1')$ نجد أنَّ:

$$x^2-4x+(x-3)^2=-2 \Rightarrow x^2-4x+9-6x+x^2=-2 \Rightarrow 2x^2-10x+11=0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية:

$$\Delta=(-10)^2-4(2)(11)=100-88=12$$

وبالتالي فإنَّ:

$$x_1=\frac{-(-10)+\sqrt{12}}{2(2)}=\frac{10+2\sqrt{3}}{4}=\frac{5+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1=x_1-3=\frac{5+\sqrt{3}}{2}-3=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$x_2=\frac{-(-10)-\sqrt{12}}{2(2)}=\frac{10-2\sqrt{3}}{4}=\frac{5-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_2=x_2-3=\frac{5-\sqrt{3}}{2}-3=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$z_3 = x_1 + i\, y_1 = \frac{5+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad \text{أو} \qquad z_3 = x_2 + i\, y_2 = \frac{5-\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$z_3 = \frac{5+\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2} = 2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 2 + z_0 = 2 + r_0 e^{i\,\mathrm{Arg}(z_0)} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

أو

$$z_3 = \frac{5-\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + z_0^* = 2 + r_0^* e^{i\,\mathrm{Arg}(z_0^*)} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

ومن الواضح أنَّ:

$$|z_0| = |z_0^*| = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$$

أي أنَّ: $r_0 = r_0^* = \sqrt{2}$ وأيضاً يكون:

$$\mathrm{Arg}(z_0) = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) = \frac{\pi}{12}$$

$$\mathrm{Arg}(z_0^*) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\right) - \pi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - \pi = \frac{5\pi}{12} - \pi = -\frac{7\pi}{12}$$

فإنَّه بالتعويض في العلاقة (3) نجد أنَّ:

$$\boxed{z_3 = 2 + \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

وبالتعويض في العلاقة (4) نجد أنَّ:

$$\boxed{z_3 = 2 + \sqrt{2}\, e^{-i\frac{7\pi}{12}}}$$

مما سبق نجد أنه العدد العقدي z_3 يكتب بالشكل:

$$z_3 = 2 + \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}} \qquad \text{أو} \qquad z_3 = 2 + \sqrt{2}\, e^{-i\frac{7\pi}{12}}$$

❸ عرِّف الدالة $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z - i}{z - i}$ عند النقطة $z = i$ لتصبح مستمرة عندها ، ثم أوجد $f'(2i)$.

الحل: حتى تكون الدالة $f(z)$ مستمرة عند النقطة z_0 يجب أن تحقق: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ، ومنه فإنَّ:

$$\lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i}\left(\frac{z^3 + 2z - i}{z - i}\right) = \frac{-i + 2i - i}{i - i} = \frac{0}{0}$$

وهي حالة عدم تعيين ولإزالتها نطبق أوبيتال:

$$\lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i}\left(\frac{z^3 + 2z - i}{z - i}\right) = \lim_{z \to i}\left(\frac{3z^2 + 2}{1}\right) = -3 + 2 = -1$$

أي تصبح الدالة $f(z)$ معرفة ومستمرة عند النقطة $z = i$ إذا كان $f(i) = -1$ وبالتالي تصبح الدالة $f(z)$ بالشكل:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3+2z-i}{z-i} & ; z\neq i\\ -1 \ ; \ z=i\end{cases}$$

وكما أنَّ:

$$f'(z)=\frac{(3z^2+2)(z-i)-(z^3+2z-i)(1)}{(z-i)^2} \Rightarrow$$

$$f'(2i)=\frac{\left[\left(3(2i)^2+2\right)(2i-i)\right]-\left[(2i)^3+2(2i)-i\right]}{(2i-i)^2}=\frac{(-12+2)i-(-8i+4i-i)}{(i)^2}=5i$$

❹ باستخدام الاحداثيات القطبية أثبت أنَّ: $(-1+i)^7=-8(1+i)$.

الحل: لنكتب العددين العقدين $z_1=(-1+i)^7$ ، $z_2=-8(1+i)$ بالشكل القطبي:

$$(-1+i)=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

ومنه فإنَّ:

$$z_1=(-1+i)^7=\left(\sqrt{2}\right)^7\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^7 \Rightarrow$$

$$z_1=8\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{21\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)\right] \Rightarrow r_1=8\sqrt{2} \quad , \ \theta_1=\frac{21\pi}{4}$$

وكما أنَّ:

$$z_2=-8(1+i)=8(-1-i)=8\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] \Rightarrow$$

$$z_2=8\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] \Rightarrow r_2=8\sqrt{2} \ , \ \theta_2=-\frac{3\pi}{4}$$

وبما أنَّ $r_1=r_2=8\sqrt{2}$ و $\theta_1=\theta_2+2n\pi$ وذلك لأنَّ: $\dfrac{21\pi}{4}=-\dfrac{3\pi}{4}+6\pi$ فإنَّ $z_1=z_2$ وهو المطلوب.

❺ أوجد الجذور التكعيبية للعدد $z=-11-2i$.

الحل: بفرض أنَّ $z=x+iy$ هو أحد الجذور التكعيبية الثلاثة عندئذٍ يتحقق أنَّ:

$$(x+iy)^3=z^3=-11-2i \Rightarrow (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)=-11-2i$$

ومن تساوي عددين عقديين بالصورة الديكارتية نجد أنَّ:

$$x^3-3xy^2=-11 \quad ....(1)$$
$$3x^2y-y^3=-2 \quad ....(2)$$

ونعلم أنَّ:

$$\left|z^3\right|^2=121+4=125 \Rightarrow \left|z^2\right|^3=125 \Rightarrow \left|z^2\right|=5 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2=5 \Rightarrow y^2=5-x^2 ....(3)$$

وبملاحظة أنَّ المعادلة (2) تكتب بالشكل:

$$y\left(3x^2-y^2\right)=-2$$

وبتعويض العلاقة (3) في المعادلة الأخيرة نجد أنَّ:

$$y\left(3x^2-\left(5-x^2\right)\right)=-2 \Rightarrow y\left(3x^2-5+x^2\right)=-2 \Rightarrow y\left(4x^2-5\right)=-2 \Rightarrow$$
$$\boxed{y=-\frac{2}{\left(4x^2-5\right)}} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

وبتعويض العلاقة (3) في المعادلة (1) نجد أنَّ:

$$x^3-3x\left(5-x^2\right)=-11 \Rightarrow x^3-15x+3x^3+11=0 \Rightarrow 4x^3-15x+11=0$$

من الواضح أنَّ $x=1$ هو جذر للمعادلة الأخيرة كونه يحققها وبالتالي بقسمة كثير الحدود الأخير على $(x-1)$ نحصل على كثير الحدود $4x^2+4x-11$ ، وبالتالي فالجذرين المتبقيين هما جذور المعادلة:

$$4x^2+4x-11=0$$
$$\Delta=(4)^2-4(4)(-11)=16+176=192 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=8\sqrt{3}$$
$$x=\frac{-(4)+8\sqrt{3}}{2(4)}=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}$$
$$x=\frac{-(4)-8\sqrt{3}}{2(4)}=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$$

وبالتالي فإنَّ الجذور الثلاثة هي:

$$x_1=1 \ , \ x_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{3} \ , \ x_3=-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّه :

$$x_1=1 \Rightarrow y_1=\frac{-2}{\left(4(1)^2-5\right)}=\frac{-2}{4-5}=\frac{-2}{-1}=2 \Rightarrow y_1=2 \Rightarrow \boxed{z_1=1+2i}$$

$$x_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{3} \Rightarrow y_2=\frac{-2}{\left(4\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)^2-5\right)}=\frac{-2}{\left(4\left(\frac{1}{4}-\sqrt{3}+3\right)-5\right)}$$

$$=\frac{-2}{1-4\sqrt{3}+12-5}=\frac{-2}{8-4\sqrt{3}}=\frac{1}{-4+2\sqrt{3}}=\frac{-4-2\sqrt{3}}{16-12}=\frac{-4-2\sqrt{3}}{4}=-1-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$y_2=-1-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{z_2=\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)+i\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$x_3=-\frac{1}{2}-\sqrt{3} \Rightarrow y_3=\frac{-2}{\left(4\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^2-5\right)}=\frac{-2}{\left(4\left(\frac{1}{4}+\sqrt{3}+3\right)-5\right)}$$

$$=\frac{-2}{1+4\sqrt{3}+12-5}=\frac{-2}{8+4\sqrt{3}}=\frac{1}{-4-2\sqrt{3}}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{16-12}=\frac{-4+2\sqrt{3}}{4}=-1+\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$y_3=-1+\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{z_3=\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

السؤال الثاني:

❶ إذا كان $f(z)=x^3+i(y+1)^3$ ، ففي أي النقاط تكون الدالة قابلة للاشتقاق وفي أي النقاط تكون تحليلية.

الحل: لدينا:

$$u(x,y)=x^3 \quad , \; v(x,y)=(y+1)^3$$

تكون الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق إذا وفقط إذا كانت المشتقات الجزئية الأربعة لـ u , v موجودة ومستمرة وتحقق شرطي كوشي ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=3(y+1)^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

نلاحظ أنَّ هذه المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي، وكذلك فإنَّ شرط كوشي ريمان الثاني محقق في جميع نقاط المستوي العقدي، والذي هو:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

أما شرط كوشي ريمان الأول فيتحقق عندما:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 3x^2=3(y+1)^2 \Rightarrow x^2=(y+1)^2 \Rightarrow x^2-(y+1)^2=0 \Rightarrow$$

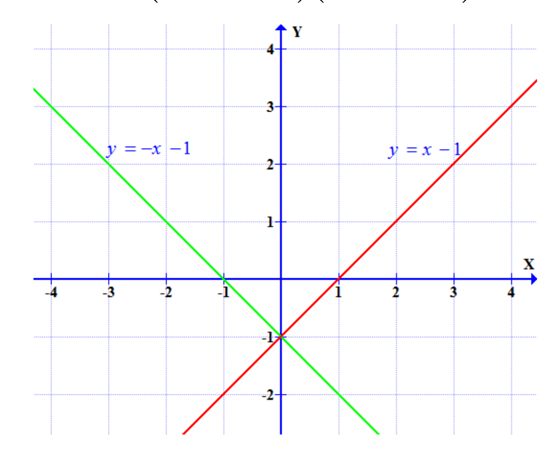
$$(x+y+1)(x-y-1)=0$$

وهذه المساواة تكون محققة عندما:

$y=-x-1$ وهذه المعادلة تمثل معادلة مستقيم غير مار من مبدأ الإحداثيات.

أو عندما $y=x-1$ وهذه المعادلة تمثل معادلة مستقيم غير مار من مبدأ الإحداثيات.

لذلك فإنَّ الدالة تكون قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقاط المستقيمين السابقين.



إنَّ هذه الدالة غير تحليلية عند أية نقطة من نقاط المستوي العقدي لأنه من أجل أي جوار لأية نقطة من نقاط المستقيمين السابقين، فإنَّ هذا الجوار سوف يحوي على نقاط تكون الدالة المعطاة قابلة للاشتقاق عند بعضها وغير قابلة للاشتقاق عند بعضها الآخر، لذلك الدالة المعطاة غير تحليلية عند أية نقطة من نقاط المستوي العقدي.

❷ إذا كان $u(x,y)=y^2-x^2+x+y$ ، فأثبت أنَّ هذه الدالـة توافقيـة ، ثمَّ أوجد المرافق التوافقي لها ، ثمَّ عبر عن الدالـة $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ بدلالة z.

الحل: لكي تكون الدالة $u(x,y)$ توافقية يجب أن تكون المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية موجودة ومستمرة ، والمشتقات من المرتبة الثانية تحقق معادلة لابلاس التفاضلية $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2x+1 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+1 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$$

إنَّ هذه المشتقات الجزئية الأربعة موجودة ومستمرة عند كل نقطة من نقاط المستوي العقدي كما نلاحظ أنَّ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2+2=0$$

وهذا يعني أنَّ الدالة $u(x,y)$ هي دالة توافقية ، ولنوجد المرافق التوافقي بالشكل:

بفرض أنَّ الدالة $v(x,y)$ هي المرافق التوافقي للدالة $u(x,y)$ وبالتالي فهما يحققان شرطي كوشي ريمان ومنه استناداً إلى شرط كوشي ريمان الأول نجد أنَّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=-2x+1$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$v(x,y)=-2xy+y+\varphi(x) \quad \cdots\cdots(*)$$

وباشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2y+\varphi'(x)$$

وبالاستفادة من شرط كوشي ريمان الثاني $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$-2y+\varphi'(x)=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-(2y+1)=-2y-1 \Rightarrow -2y+\varphi'(x)=-2y-1$$

$$\varphi'(x)=-1 \Rightarrow \varphi(x)=-x+c$$

وبالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$v(x,y)=-2xy+y-x+c$$

وهي دالة المرافق التوافقي للدالة التوافقية $u(x,y)$ ، وبالتالي نجد انَّ الدالة التحليلية $f(z)$ تملك الشكل:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\left(y^2-x^2+x+y\right)+i\left(-2xy+y-x+c\right)$$

وبما أنَّ الدالة $f(z)$ تحليلية فإنَّه للتعبير عن الدالة $f(z)$ بدلالة z نستبدل كل x بـ z وكل y بصفر فنجد أنَّ:

$$f(z)=\left(z-z^2\right)+i\left(-z+c\right)=-z^2+(1-i)z+ic$$



❸ إذا كان $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,6x(2y-1)$ و $f(0)=3-2i$ ، فاحسب $f(1+i)$.

الحل: لنفرض أنَّ:

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

وبالتالي فإنَّ:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

واستناداً إلى الفرض يكون:

$$6x(2y-1)=\operatorname{Im} f'(z)=\frac{\partial v}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial v}{\partial x}=6x(2y-1)$$

وبالمكاملة بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$v(x,y)=3x^2(2y-1)+\varphi(y)\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

وباشتقاق العلاقة $(*)$ بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=6x^2+\varphi'(y)$$

ولكن استناداً إلى شرطي كوشي ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad,\quad\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

نجد أنَّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2+\varphi'(y)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-6x(2y-1)\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

وبمكاملة العلاقة (2) بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$u(x,y)=-6xy^2+6xy+g(x)\quad\cdots\cdots\cdots(**)$$

وباشتقاق العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ x نجد أنَّ:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-6y^2+6y+g'(x)\quad\cdots\cdots\cdots(1')$$

وبالاستفادة من العلاقتين (1) و $(1')$ نجد أنَّ:

$$6x^2+\varphi'(y)=-6y^2+6y+g'(x)$$

ومنه نجد أنَّ:

$$\varphi'(y)=-6y^2+6y\quad\Rightarrow\quad\varphi(y)=-2y^3+3y^2+c_1$$
$$g'(x)=6x^2\quad\Rightarrow\quad g(x)=2x^3+c_2$$

وبالتعويض في العلاقتين $(*)$ و $(**)$ نجد أنَّ:

$$u(x,y)=-6xy^2+6xy+2x^3+c_2$$
$$v(x,y)=3x^2(2y-1)-2y^3+3y^2+c_1$$

وبالتعويض في الدالة $f(z)$ نجد أنَّ:

$$f(z)=\left[-6xy^2+6xy+2x^3+c_2\right]+i\left[3x^2(2y-1)-2y^3+3y^2+c_1\right]$$

ولدينا:

$$3-2i=f(0)=c_2+ic_1 \quad \Rightarrow c_2=3 \ , \ c_1=-2$$

وبالتالي فإن:

$$f(z)=\left[-6xy^2+6xy+2x^3+3\right]+i\left[3x^2(2y-1)-2y^3+3y^2-2\right]$$

ومنه فإنَّ:

$$f(1+i)=[-6+6+2+3]+i\left[3(2-1)-2+3-2\right]=5+2i$$

وبتبديل كل x بـ z وكل y بصفر نحصل على الدالة التحليلية $f(z)$ أي أنَّ:

$$f(z)=2z^3-3iz^2+3-2i$$

❹ إذا كـان $\log z=\text{Log}|z|+i\,\phi$ حيث $\left(|z|>0 \ , \ \frac{2\pi}{3}\le\phi\le\frac{8\pi}{3}\right)$ ، فأوجد $\log\left(z^2\right)$, $2\log(z)$ ، ثمَّ قارن بينهما إذا علمت أنَّ $z=i$.

الحل:

$$\log\left(z^2\right)=\log\left(i^2\right)=\log(-1)=\log|-1|+i\,\pi=\log(1)+i\,\pi=0+i\,\pi=i\,\pi \quad ....(1)$$

$$2\log(z)=2\log(i)=2\left[\log|i|+i\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right]$$

$$=2\left[\log(1)+i\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right]=2\left[0+i\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right]=i\,\frac{5\pi}{2} \quad ....(2)$$

من (1) و (2) نجد أنَّه من أجل $z=i$ وضمن المجال $\frac{2\pi}{3}\le\phi\le\frac{8\pi}{3}$ نجد أنَّ:

$$\log\left(z^2\right)\ne 2\log(z)$$

❺ باستخدام الدوال العكسية أوجد حلول المعادلة : $\cos z=\sqrt{2}$.

الحل:

$$\cos z=\sqrt{2} \quad \Rightarrow z=\arccos\left(\sqrt{2}\right)$$

ونعلم أنَّ:

$$\arccos(\omega)=-i\,\log\left(\omega+i\sqrt{1-\omega^2}\right)$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\arccos\left(\sqrt{2}\right)=-i\,\log\left[\sqrt{2}+i\sqrt{1-\left(\sqrt{2}\right)^2}\right]=-i\,\log\left[\sqrt{2}+i\,(\mp i)\right]=-i\,\log\left[\sqrt{2}+i\,(\mp i)\right]$$

$$=-i\ \log\left[\sqrt{2}\pm 1\right]=-i\left[\log\left|\sqrt{2}\pm 1\right|+i\,(0+2n\pi)\right]=-i\left[\log\left(\sqrt{2}\pm 1\right)+i\,(2n\pi)\right]$$

$$=\left[(2n\pi)-i\ \log\left(\sqrt{2}\pm 1\right)\right]=\left[(2n\pi)+i\ \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}\pm 1}\right)\right]=\left[(2n\pi)+i\ \log\left(\frac{\sqrt{2}\mp 1}{2-1}\right)\right]$$

$$=(2n\pi)+i\ \log\left(\sqrt{2}\mp 1\right)\quad ;\quad n=0\,,\mp 1,\ \mp 2\,,....$$

ومنه فإنَّ حلول المعادلة المعطاة هي:

$$z=\arccos\left(\sqrt{2}\right)=(2n\pi)+i\ \log\left(\sqrt{2}\mp 1\right)\quad ;\ n=0\,,\mp 1\,,\mp 2\,,....$$

❻ أوجد جميع جذور المعادلة: $e^{z}=-3$.

الحل:

طريقة أولى:

$$e^{z}=-3\ \Rightarrow\ z=\log(-3)=\log\left|-3\right|+i\,(\pi+2n\pi)=\ \log(3)+i\,(\pi+2n\pi)\ ;\ \ n=0\,,\mp 1\,,\mp 2\,,...$$

طريقة ثانية:

بفرض أنَّ $z=x+i\,y$ عندئذٍ:

$$e^{z}=-3\ \Rightarrow\ e^{x+i\,y}=-3\ \Rightarrow\ e^{x}e^{i\,y}=-3\ \Rightarrow\ e^{x}\cos y+i\,e^{x}\sin y=-3$$

ومن تساوي عددين عقديين نجد أنَّ:

$$e^{x}\cos y=-3\qquad ......(1)$$
$$e^{x}\sin y=0\qquad ....(2)$$

من (2) نجد أنَّ:

$$\sin y=0\quad ;\ \left(e^{x}\neq 0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}\right)\ \Rightarrow\ \ y=n\pi\ ;\ \ n=0\ ,\ \mp 1\,,\mp 2\,,....$$

وبالتعويض في (1) نجد أنَّ:

$$e^{x}\cos(n\pi)=-3$$

وهنا نميز حالتين:

أولاً: $e^{x}\cos(2n\pi)=-3\Rightarrow\ e^{x}=-3\quad (e^{x}>0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R}$ وهذا الحل مرفوض كون$)$

ثانياً: $e^{x}\cos((2n+1)\pi)=-3\Rightarrow -e^{x}=-3\ \Rightarrow\ e^{x}=3\ \Rightarrow\ x=\log(3)$

مما سبق نجد أنَّ جميع الحلول المطلوبة:

$$z=x+i\,y=\log(3)+i\,(2n+1)\pi\quad ;\ \ n=0\,,\mp 1\,,\mp 2\,,....$$

السؤال الثالث:

1". أوجد التحويلة الخطية الكسرية التي تنقل النقاط $z_1=-1\ ,\ z_2=0\ ,\ z_3=1$ فوق النقاط $\omega_1=\infty\ ,\ \omega_2=0\ ,\ \omega_3=1$ على الترتيب ، ما هي النقاط الثابتة لهذه التحويلة ، ثمَّ أوجد خيال المستقيم $y=0$ وفق هذه التحويلة.

الحل:

تملك التحويلة الخطية الكسرية الشكل الآتي:

$$\frac{(\omega-\omega_1)}{(\omega-\omega_3)}\cdot\frac{(\omega_2-\omega_3)}{(\omega_2-\omega_1)}=\frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}\cdot\frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}$$

وبما أنَّ $\omega_1=\infty$ نبدل في التحويلة كل ω_1 بـ $\frac{1}{\omega_1}$ ومن ثمَّ نوحد المقامات ونختصر، وبعد ذلك نبدل ω_1 بالصفر.

$$\frac{(\omega\omega_1-1)}{(\omega-\omega_3)}\cdot\frac{(\omega_2-\omega_3)}{(\omega_2\omega_1-1)}=\frac{(z-z_1)}{(z-z_3)}\cdot\frac{(z_2-z_3)}{(z_2-z_1)}$$

وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{(0-1)}{(\omega-1)}\cdot\frac{(0-1)}{(0-1)}=\frac{(z+1)}{(z-1)}\cdot\frac{(0-1)}{(0+1)}\Rightarrow\frac{1}{(\omega-1)}=\frac{(z+1)}{(z-1)}\Rightarrow\omega-1=\frac{(z-1)}{(z+1)}\Rightarrow\omega=\frac{(z-1)}{(z+1)}+1$$

$$\omega=\frac{(z-1)+(z+1)}{(z+1)}\Rightarrow\boxed{\omega=\frac{2z}{(z+1)}}$$

وهي التحويلة الخطية الكسرية المطلوبة.

إنَّ النقاط الثابتة في التحويلة هي النقاط التي تحقق العلاقة: $f(z)=z$ وبالتالي فإنَّ:

$$\frac{2z}{(z+1)}=z\Rightarrow 2z=z(z+1)\Rightarrow z(z+1)-2z=0\Rightarrow z(z+1-2)=0\Rightarrow$$

$$z(z-1)=0\Rightarrow z_1=0\,,\,z_2=1$$

إذاً فالنقاط الثابتة في التحويلة هي $z_1=0\,,\,z_2=1$.

من أجل إيجاد خيال المستقيم $y=0$ وفق التحويلة الناتجة هناك طريقتين:

الطريقة الأولى: نستفيد من كون النقطتان الثابتتان $z_1=0\,,\,z_2=1$ تقعان على المستقيم $y=0$ ، لذلك فإنَّ خيال المستقيم المار منهما $y=0$ هو المستقيم المار من صورتيهما وهو المستقيم $v=0$.

الطريقة الثانية: نكتب z بدلالة ω بالشكل:

$$\omega=\frac{2z}{(z+1)}\Rightarrow 2z=\omega z+\omega\Rightarrow 2z-\omega z=\omega\Rightarrow z(2-\omega)=\omega\Rightarrow\boxed{z=\frac{\omega}{2-\omega}}$$

ومن ثمَّ نفرض أنَّ $\omega=u+iv\ ,\ z=x+iy$ ونعوض في العلاقة الأخيرة:

$$x+iy=\frac{u+iv}{2-(u+iv)}=\frac{u+iv}{(2-u)-iv}=\frac{u+iv}{(2-u)-iv}\cdot\frac{(2-u)+iv}{(2-u)+iv}$$

$$=\frac{2u-u^2-v^2}{(2-u)^2+v^2}+i\,\frac{uv+2v-uv}{(2-u)^2+v^2}=\frac{2u-u^2-v^2}{(2-u)^2+v^2}+i\,\frac{2v}{(2-u)^2+v^2}$$

ومن تساوي عددين عقديين نجد أنَّ:

$$x=\frac{2u-u^2-v^2}{(2-u)^2+v^2}\ ,\ y=\frac{2v}{(2-u)^2+v^2}$$

وبما أنَّ $y=0$ فإنَّ:

$$\frac{2v}{(2-u)^2+v^2}=0\Rightarrow v=0$$

وبالتالي فإنَّ خيال المستقيم الأفقي $y=0$ هو المستقيم الأفقي $v=0$.

❀

2". أوجد خيال $(x\geq 0\ ,\ 0\leq y\leq 2)$ وفق التحويلة $\omega=\frac{1}{z}$ ، مع الرسم .

الحل:

$$\omega=\frac{1}{z}\Rightarrow z=\frac{1}{\omega}$$

بفرض $\omega=u+iv\ \ ,\ z=x+i\,y$ عندئذٍ نجد أن العلاقة الأخيرة تصبح بالشكل:

$$x+i\,y=\frac{1}{u+iv}=\frac{1}{(u+iv)}\cdot\frac{(u-iv)}{(u-iv)}=\frac{u}{u^2+v^2}+i\frac{-v}{u^2+v^2}\ ;\ u^2+v^2\neq 0$$

ومن تساوي عددين عقدين نجد أنَّ:

$$x=\frac{u}{u^2+v^2}\ ,\ y=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

وبما أنَّ:

$$x\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{u}{u^2+v^2}\geq 0\ \Rightarrow\ \boxed{u\geq 0}$$

وبما أنَّ: $0\leq y\leq 2$ ، فإنَّه من أجل:

$$y\geq 0\ \Rightarrow\ \frac{-v}{u^2+v^2}\geq 0\ \Rightarrow\ -v\geq 0\ \Rightarrow\ \boxed{v\leq 0}$$

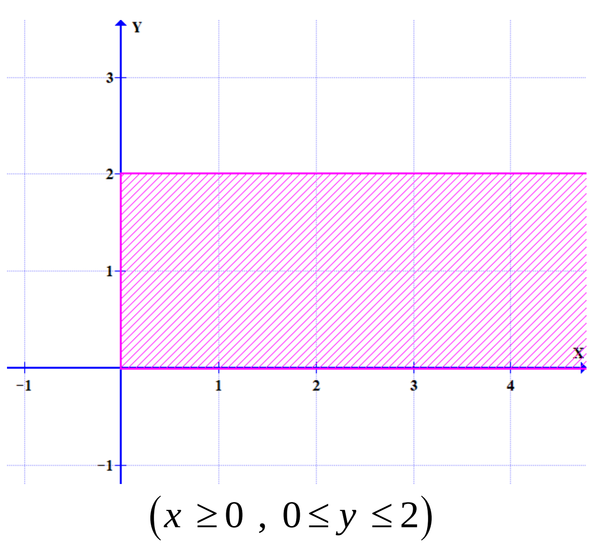
$$y\leq 2\ \Rightarrow\ \frac{-v}{u^2+v^2}\leq 2\ \Rightarrow\ -v\leq 2\left(u^2+v^2\right)\ \Rightarrow\ u^2+v^2\geq -\frac{v}{2}\ \Rightarrow$$

$$u^2+v^2+\frac{v}{2}\geq 0\ \Rightarrow\ u^2+\left(v^2+\frac{v}{2}+\frac{1}{16}\right)\geq\frac{1}{16}\ \Rightarrow\ \boxed{u^2+\left(v+\frac{1}{4}\right)^2\geq\frac{1}{16}}$$

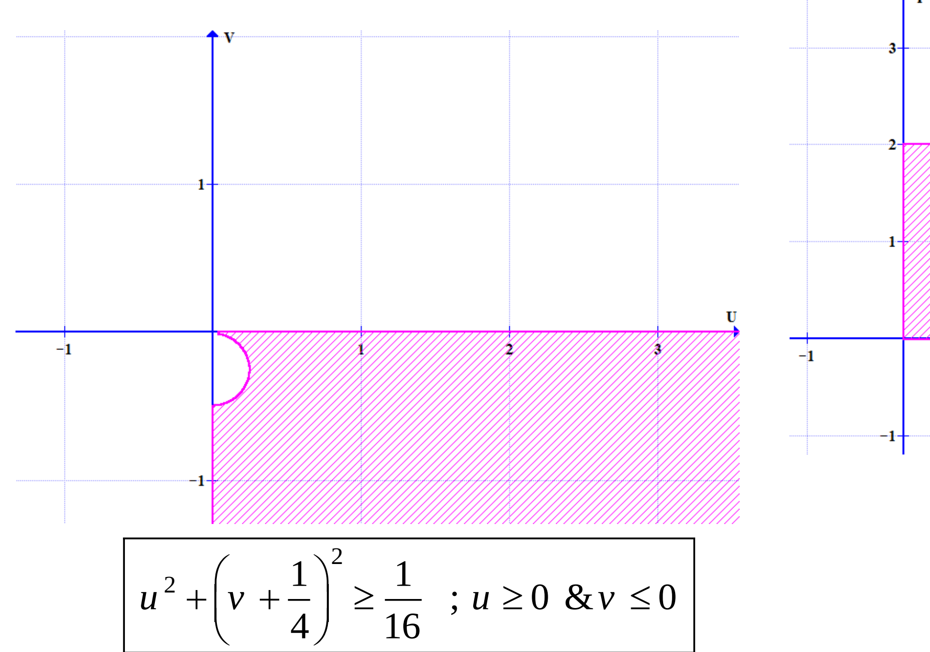
وبالتـــــــالي نجـــــــد أنَّ خيـــــال $(x\geq 0\ ,\ 0\leq y\leq 2)$ وفـــــق التحويلـــــــة $\omega=\frac{1}{z}$ هـــــــو المنطقـــــــة

$\boxed{u^2+\left(v+\frac{1}{4}\right)^2\geq\frac{1}{16}\ \ ;\ u\geq 0\ \&\ v\leq 0}$ أي مجموعة النقاط الواقعة خارجية القرص الدائري الذي مركزه $\left(0\,,\,-\frac{1}{4}\right)$

ونصف قطره $R=\frac{1}{4}$ مع النقاط الواقعة على المحيط وحصراً الواقعة في الربع الرابع ولنوضح ذلك بالرسم.



$\left(x \geq 0 \;,\; 0 \leq y \leq 2\right)$



$$u^2 + \left(v + \frac{1}{4}\right)^2 \geq \frac{1}{16} \quad ; u \geq 0 \;\&\, v \leq 0$$

انتهت الأجوبة